

## 4.3 对数（单元教学设计）

驻马店第二高级中学 柯婷婷

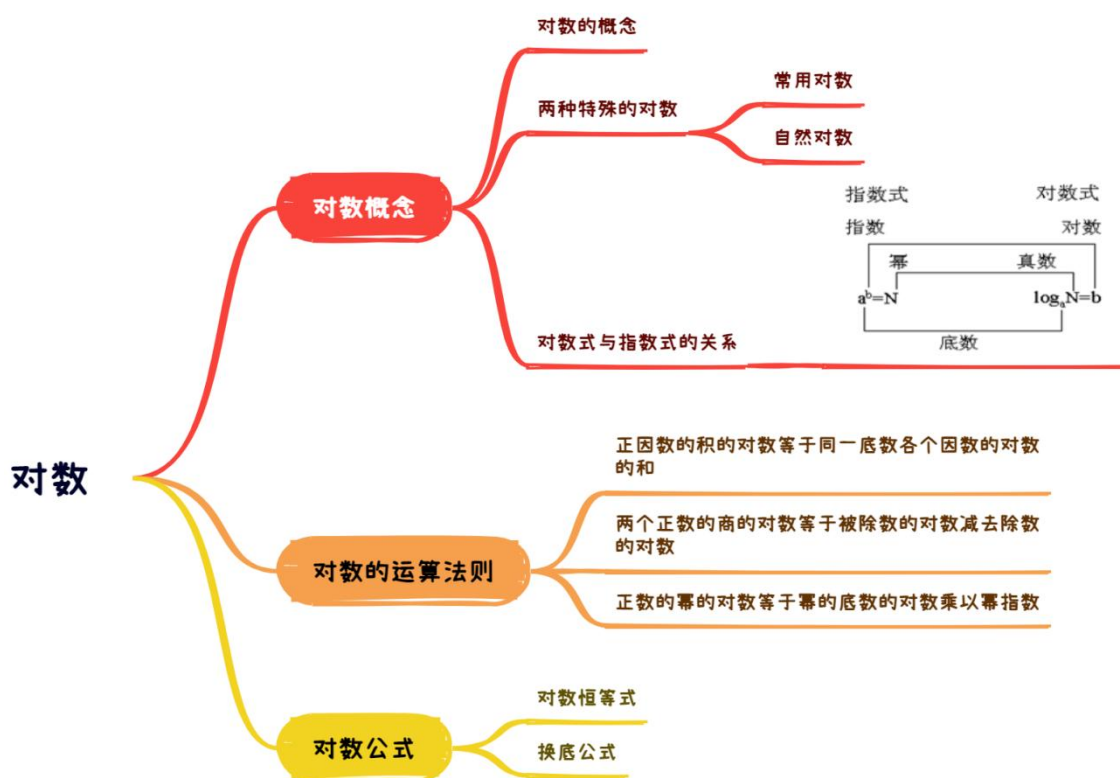
### 一、【单元主题】

北师大版必修课高一数学必修第一册 第四章 对数运算及对数函数（对数及对数的运算性质）

### 二、【单元内容】

数及其运算的产生和发展是推动数学发展的重要源泉和动力。数、式、方程、函数等内容的基础是数及其运算，函数是数及其运算的延伸和发展。对数函数是高中数学非常重要的函数之一，学好对数函数的前提是学好对数及其运算性质。本章类比研究指数与指数函数学习的过程，先类比指数的相关内容，建立对数的概念、研究其运算性质。

具体知识框架如下表：



### 三、【课标要求】

1：理解对数的概念和运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数。

2: 通过收集, 阅读了解对数概念的形成及发展历史资料, 撰写小论文, 论述对数发明的过程及对数简化运算的价值。

#### 四、【单元目标】

1: 理解对数的概念和运算性质, 知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数。

2: 经历由具体问题抽象出对数概念的过程, 感受对数在解决数学问题和实际应用中的作用。培养其数学建模核心素养。

3: 能依据指数幂的运算性质推导出对数的运算性质, 并会用对数的运算性质进行对数的化简、运算。通过转化思想方法的运用, 培养学生转化的思想观念及逻辑思维能力, 数学直观及数学运算等核心素养。

4: 通过收集, 阅读了解对数概念的形成及发展历史资料, 撰写小论文, 论述对数发明的过程及对数简化运算的价值。体会对数的产生在数学发展中的价值, 从中渗透数学文化价值。

#### 五、【学情分析】

学生已经学习了指数幂的运算, 了解了研究一个代数对象的基本路径, 因此容易构建本单元的研究路径。通过实际问题的提出, 获得研究对象给对数下定义之后, 类比指数幂的运算性质, 能够提出进一步要研究对数的运算性质等, 但是运算性质的推导、特别是换底公式的推导有一定难度, 原因是结论未知, 类似于结论开放性题目, 这是学生不习惯的。因此在课堂教学中, 我采用导入式教学, 具体通过引入有趣的数学史料, 设计合理问题串, 层层导入, 想激发起学生的学习兴趣, 后带着明确的目标快乐轻松的去学习。

#### 六、【教学设计安排】

**课时安排:** 约 3 课时

**教学重点:** 对数的概念及其运算性质。

**教学难点:** 对数概念的理解; 对数运算性质及换底公式的推导及应用。

**教学策略:** 目标引领 问题导向 自主学习 合作学习

**教学方法/过程:** 本单元采用以问题串式为导向启发式教学, 具体环节如下:

1 课前预习, 2 情景引入, 温故知新, 3 探究新知, 内涵辨析, 4 例题练习, 巩固理解, 5 小结提升, 形成结构, 6 目标检测, 检验效果, 7 布置作业, 应用迁移。

## 具体教学设计

### 课时设计 1：对数的概念（1 课时）

#### 一 教学目标

1. 理解对数的概念，能进行指数式与对数式的互化；
2. 了解常用对数与自然对数的意义，理解对数恒等式并能运用于有关对数计算。

#### 二 学科素养

1. 数学抽象：对数的概念；
2. 逻辑推理：指数式与对数式的转化；
3. 数学运算：对数的运算；
4. 直观想象：指数与对数的关系；
5. 数学建模：在实际问题中建立对数概念；

#### 三 教学重难点

1. 重点：对数的概念、指数式与对数的互化
2. 难点：对对数符号的认识及对数的简单应用

#### 四 教学过程

##### 环节一 情景引入，温故知新

导入 1: 1619 年, 伦敦斯彼得所著的《新对数》使对数与自然对数更接近(以  $e=2.71828\dots$  为底)。对数的发明为当时社会的发展起了重要的影响, 正如科学家伽利略(1564–1642)说: “给我时间, 空间和对数, 我可以创造出一个宇宙”。又如十八世纪数学家拉普拉(1749–1827)亦提到: “对数用缩短计算的时间来使天文学家的寿命加倍”。那么什么是对数? 带着这个问题来学习本章的内容。

导入 2: 第三章第一节“指数幂的拓展”中提到, 经测算薇甘菊侵害田地面积  $S$  (单位:  $hm^2$ ) 与年数  $t$  (年) 的关系式为  $S = s_0 \cdot 1.057^t$ . 其中  $s_0$  (单位:  $hm^2$ ) 为侵害面积的初始值。

现在, 设经过  $t$  年后, 薇甘菊的侵害面积会增长到原来的 5 倍, 可得  $S = s_0 \cdot 1.057^t = 5s_0$

即  $1.057^t = 5$ 。

**问题 1:** 方程  $1.057^t = 5$  有解吗? 有几个解? 怎样求解?

**【设计意图】**开门见山, 介绍对数的史料, 提出课题。结合实际情境, 提出新问题, 从而引出对数的概念。培养和发展逻辑推理和数学运算的核心素养。

**【师生活动】**教师可以提示学生回想减法, 除法, 根式计算的引入过程及上一章指数函数的相关性质, 引导学生思考交流解决此问题。

## 环节二 抽象概念，内涵辨析

**问题 2：**对于一般情形  $a^x = N$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 求  $x$ ，从而引入什么？

**【破解方法】**先由学生独立思考、回答，再由师生一起总结，给出对数概念。

### 【归纳新知】

#### 1、对数的概念

如果  $a^b = N$  ( $a > 0$ ，且  $a \neq 1$ )，那么数  $b$  叫做以  $a$  为底  $N$  的对数，记作： $\log_a N = b$ 。其中  $a$  叫做对数的底数， $N$  叫做真数。

**知识点诠释：**

对数式  $\log_a N = b$  中各字母的取值范围是： $a > 0$  且  $a \neq 1$ ， $N > 0$ ， $b \in R$ 。

**问题 3：**有哪些特殊的对数？

**【师生活动】**学生在阅读教科书之后回答，教师并给出正确的书写方式。

### 【归纳新知】

#### 2、两种特殊的对数

通常将以 10 为底的对数叫做常用对数， $\log_{10} N$  简记作  $\lg N$ 。以  $e$  ( $e$  是一个无理数， $e = 2.7182\cdots$ ) 为底的对数叫做自然对数， $\log_e N$  简记为  $\ln N$ 。

**问题 4：**指数、对数之间有怎样的关系？请你尝试用表格或者图来描述。

**【学生活动】**学生自主完成，之后小组合作展示交流，教师予以完善。

### 【归纳新知】

#### 3、对数式与指数式的关系

由定义可知：对数式与指数式联系密切，且可以互相转化。它们的关系可由下图表示。



记忆口诀：底数不变，指对互换。

**【设计意图】**加深学生对对数概念的理解。

**问题 5：**利用指数、对数的关系，结合指数函数的性质，请你谈谈是否所有的实数都有对数？据此你能得到什么结论？

**【师生活动】**引导学生依据对数的意义，结合指数函数性质进行思考分析，小组合作交

流来完成。

### 【归纳新知】

4、对数  $\log_a N$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 具有下列性质:

(1) 0 和负数没有对数, 即  $N > 0$ ; (2) 1 的对数为 0, 即  $\log_a 1 = 0$ ;

(3) 底的对数等于 1, 即  $\log_a a = 1$

练习 1. 思考辨析

(1)  $\log_a N$  是  $\log_a$  与  $N$  的乘积。( )

(2)  $(-2)^3 = -8$  可化为  $\log_{(-2)}(-8) = 3$ 。( )

(3) 对数运算的实质是求幂指数。( )

[答案] (1)  $\times$  (2)  $\times$  (3)  $\checkmark$

【学生活动】由学生抢答, 学生纠错, 自主完成

【设计意图】检测学生对概念和性质的理解程度

### 环节三 例题练习, 巩固新知

例 1 将下列指数式改写为对数式:

(1)  $5^3 = 125$ ; (2)  $8^{\frac{2}{3}} = 4$ ; (3)  $(\frac{1}{2})^{-3} = 8$ ; (4)  $6^{-2} = \frac{1}{36}$ 。

例 2 将下列对数式改写成指数式:

(1)  $\log_2 64 = 6$ ; (2)  $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ ; (3)  $\lg 0.0001 = -3$ ; (4)  $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ 。

【学生活动】由学生抢答, 学生纠错, 自主完成

【设计意图】检测学生对指数对数互化的熟练度。

问题 6: 你能归纳出指数式与对数式互化的方法吗?

学生思考交流作答。

例 3 求下列各式中的  $x$  值:

(1)  $\log_3 x = 4$ ; (2)  $\log_5 \frac{1}{25} = x$ ; (3)  $\log_x 64 = 2$ ;

(4)  $\ln x = -1$ ; (5)  $3^x = 5$ ; (6)  $2^{\log_2 3} = x$ 。

【师生活动】由学生自主完成, 汇报成果。

【设计意图】检测学生对对数性质的理解。

练习 2: 自主完成课后练习

### 环节四 小结提升, 形成结构

问题 7: 本节课你学习了哪些知识? 有什么收获?

【师生活动】学生自主回答, 学生根据课堂学习, 自主总结知识要点, 及运用的思想方法。注意总结自己在学习中的易错点。

### 环节五 目标检测, 检验效果

当堂达标

1. 在  $b = \log_3(m-1)$  中, 实数  $m$  的取值范围是( )

2. 若  $\log_2(\log_x 9) = 1$ , 则  $x =$  \_\_\_\_\_.

3.  $\log_3 3 + 3^{\log_3 2} =$  \_\_\_\_\_.

4. 求下列各式中的  $x$  值:

(1)  $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ ;      (2)  $x = \log_{27} \frac{1}{9}$ ;

**【设计意图】**通过练习巩固本节所学知识, 巩固对数的概念及其性质, 增强学生的数学抽象、数学运算、逻辑推理的核心素养。

#### 环节六 布置作业, 应用迁移

1. 课时练    2. 预习下节课内容

### 五 板书设计

对 数

1、指对互化

4、典例分析

5、总结

例 1、

例 2、

2、两个对数

例 3、

6、作业

3、对数的基本性质

### 六 教学反思

如何实现高效课堂, 如何提高学生的学习兴趣, 在高中数学概念课的教学中非常重要。先让学生自主预习, 阅读材料, 再结合课堂我给出的史料与实际情境问题, 感受对数发明的过程, 感悟对数发明的必然性。让学生对对数概念教学既能知其然, 又能知所以然, 还知道去应用知识, 充分的体现的探究对数概念的意义和价值。最大限度的提高了学生的学习兴趣。另外, 在备课前我对新课标和新教材有整体的把握和认识, 将知识系统化, 注意到知识前后的衔接及联系, 了解学生认知规律, 知识水平, 设计了合理的问题串, 引导学生带着问题自主探究思考学习, 使课堂教学效率最大化。总体上讲, 本节课取得的很好的效果, 但今后的教学中要如何将数学的思想方法和核心素养更好地渗透到平时的课堂教学中仍需要注意。

#### 课时设计 2: 对数的运算性质 (1 课时)

##### 一 教学目标

1. 理解并掌握对数的运算性质, 完成简单的对数运算;
2. 类比指数的运算性质, 在对数运算中进一步理解对数的概念及意义。

##### 二 学科素养

在对对数运算性质的推导中及应用中, 培养学生的逻辑推理能力素养及数学运算素养;

##### 三 教学重难点

1. 重点: 理解掌握对数的运算性质;
2. 难点: 应用性质准确的计算。

##### 四 教学过程

## 环节一 情景引入，温故知新

**导入：**康熙是我国非常著名的皇帝，同时也被评为数学学的最好的皇帝，他所主持编制的《御制数理精蕴》中提到：“以借数与真数对列成表，故名对数表。其法以加代乘，以减代除，以加倍代自乘，故折半即开方……”这段话是什么意思呢？其中蕴含了哪些数学道理呢？带着这节问题开启本节课的学习。

**【设计意图】**以史料导入，渗透数学文化价值，同时增强数学的趣味性，让学生乐于参与进来。

**问题 1：**在引入对数之后，自然就应研究对数的运算性质．我们知道了对数与指数间的关系，能否利用指数运算性质得出相应的对数运算性质呢？请回忆指数的运算性质。

**【师生活动】**引导学生在数学运算的研究路径指引下提出问题，并利用数学知识之间的联系进行猜想，为本课的研究做好规划。

## 环节二 探究新知，内涵辨析

**问题 2：**由指数运算性质  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ，你能得出对数的运算性质吗？

**【师生活动】**这个问题的目标不确定，引导学生利用指数式和对数式之间的关系进行化简，直到将之转化为对数表达的关系即可。

设  $M = a^m, N = a^n$  .

因为  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ，所以  $MN = a^{m+n}$  .

根据对数与指数间的关系可得  $\log_a M = m, \log_a N = n$  ,

$\log_a (MN) = \log_a a^{m+n} = m+n = \log_a M + \log_a N$ .

**问题 3：**利用指数式和对数式之间的关系，由指数幂的如下运算性质能得到对数运算的什么性质？

(1)  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  ;

(2)  $(a^m)^n = a^{mn}$  .

**【师生活动】**引导学生通过类比，小组合作探究完成。最后教师补充。

(1) 设  $M = a^m, N = a^n$  .

因为  $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ，所以  $\frac{M}{N} = a^{m-n}$  .

根据对数与指数间的关系可得  $\log_a M = m, \log_a N = n$ ,

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a a^{m-n} = m - n = \log_a M - \log_a N.$$

(2) 设  $M = a^m$ ,

因为  $(a^m)^n = a^{mn}$ , 所以  $M^n = a^{mn}$ .

根据对数与指数间的关系可得  $\log_a M = m$ ,  $\log_a M^n = \log_a a^{mn} = mn = n \log_a M$ .

**【设计意图】**通过小组合作交流探究, 加深对对数性质运算的理解。

**【归纳新知】**

### 1、对数的运算法则

已知  $\log_a M$ ,  $\log_a N$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ,  $M, N > 0$ )

(1) 正因数的积的对数等于同一底数各个因数的对数的和;

$$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$$

推广:  $\log_a (N_1 N_2 \cdots N_k) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \cdots + \log_a N_k$  ( $N_1, N_2, \cdots, N_k > 0$ )

(2) 两个正数的商的对数等于被除数的对数减去除数的对数;

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

(3) 正数的幂的对数等于幂的底数的对数乘以幂指数;

$$\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$$

思考辨析: 阅读教材第 103 页“思考交流”, 并进行研讨。

**【师生活动】**学生小组合作交流完成

**【设计意图】**加深对公式的理解

环节三 例题练习, 巩固新知

例 1 计算:

$$(1) \log_2 (64 \times 521) \quad (2) \lg 0.0001 \quad (3) \log_3 \sqrt[5]{81}$$

**【设计意图】**分析真数的特点, 运用对数运算性质完成简单的计算

例 2 已知  $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$ , 用  $a, b$  表示下列各数的值:

$$(1) \log_2 30; (2) \log_2 \frac{5}{9}; (3) \log_2 \frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt{20}}$$



【设计意图】利用对数运算性质建立不同运算结构之间的关系

#### 环节四 小结提升，形成结构

问题 4：本节课你学习了哪些知识？有什么收获？

问题 5：对数的运算性质有什么特点？显示出了什么优势？

【师生活动】学生自主回答，学生根据课堂学习，自主总结知识要点，及运用的思想方法。注意总结自己在学习中的易错点。

问题 6：课堂开头《数理精蕴》中蕴含了什么数学道理，你能讲一下吗？

#### 环节五 目标检测，检验效果

练习：教材第 103 页练习 1-3 题。

【学生活动】自主思考完成

#### 环节六 布置作业，应用迁移

1. 课时练
2. 教材 106, 107 页习题 4-2A 组第 1-3 题

### 五 板书设计

对数的运算性质

1、复习：（1）指对互化

3、典例分析

4、总结

（2）指数的运算性质

例 1、

例 2、

5、作业

2、对数的运算性质

### 六 教学反思

通过本节课的学习，我对性质应用教学有了更深刻的认识，不再是单一的让学生死记性质，而是让性质“动”起来，先是引入丰富的数学史料，让对数的运算性质“生动”起来，激发学生的求知欲，然后结合课标具体的问题，使学生“动”起来，证明出对数的运算性质。为了加深对性质的理解，及时的让学生思考辨析，成功的理解了公式。紧接着，讲练结合，学生为主体，应用公式。很顺利的完成了本节课。但课堂时间毕竟有限，学生基础比较薄弱，不会灵活的变通，需要教师多准备些典型的题目供学生课下思考。

### 课时设计 3：换底公式（1 课时）

#### 一 教学目标

- 1：会推导对数的换底公式，能运用换底公式进行准确地运算；
- 2：让学生经历推导对数的换底公式的过程，培养学生分析问题，解决问题的能力；
- 3：会用换底公式计算。

#### 二 学科素养

在换底公式的推导中培养学生的逻辑推理核心素养，在换底公式的应用中，培养学生的数学运算核心素养，并渗透数学建模思想。

### 三 教学重难点

- 1: 换底公式的应用（重点）
- 2: 换底公式的推导与综合应用（难点）

### 四 教学过程

#### 环节一 情景引入，温故知新

**导入 1:** 你还记得对数的概念与运算性质吗？

**导入 2:** 数学史上，人们经过大量的努力，制作了常用对数表和自然对数表，只有通过查表就能求出任意正数的常用对数或自然对数。现在，利用计算器，也可以直接求出任意正数的常用对数或自然对数。但是计算器上只有以 10 或  $e$  为底的对数，如果能将其他底的对数转换为以 10 或  $e$  为底的对数，才能方便地求出这些对数。

**问题 1:** 如何求  $\log_2 5$  的值呢？

**【师生活动】** 请同学们两个人一组，尝试将上面的  $\log_2 5 = x$  用常用对数表示出来，一个转化成以 10 为底的对数，另一个转化成以  $e$  为底的对数，并计算器算出你们的值，比较你们的表达式和计算结果，看看你有什么收获？

$$\text{学生探求得到: } x = \frac{\lg 5}{\lg 2} = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.321$$

#### 环节二 探究新知，内涵辨析

**问题 2:** 思考  $\log_2 5$  能用以其它数为底来表示吗？

**【师生活动】** 要求学生自主作答汇报结果

**【设计意图】** 让学生在问题 1 的基础上发散思维，思考交流，充分的调动了学生学习的积极性。

**问题 3:** 根据对数的定义，你能用  $\log_c a, \log_c b$  表示  $\log_a b (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1; b > 0; c > 0, \text{ 且 } c \neq 1)$  吗？

**【破解方法】** 设  $\log_a b = x$ ，则  $a^x = b$

于是  $\log_c a^x = \log_c b$ ，即  $x \log_c a = \log_c b$ ，

$$\text{则 } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1; b > 0; c > 0, \text{ 且 } c \neq 1).$$

【师生活动】学生思考，主动上台讲演，教师补充。

【归纳新知】同底对数才能运算，底数不同时可考虑进行换底，在  $a > 0, a \neq 1$ ，的前提下进行：

$$\text{换底公式 } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1; b > 0; c > 0, \text{ 且 } c \neq 1).$$

问题 4：你能用换底公式证明下列结论吗？

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1) \quad \cdot \quad \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

【师生活动】学生动手完成，教师总结结论。

环节三：例题练习，巩固理解

例 3 计算：

$$(1) \log_{27} 81; \quad (2) \log_{16} 25 \bullet \log_5 8$$

【师生活动】引导学生自主完成

例 4 计算：

$$(1) \log_4 \frac{25}{9} + \log_2 3 - \log_{0.5} \frac{1}{5};$$

$$(2) (\log_3 2 + \log_2 3)^2 - \frac{\log_2 3}{\log_3 2} - \frac{\log_3 2}{\log_2 3}$$

【师生活动】教师讲解，重点讲清楚思路。

问题 5：例 4 中用到对数中哪些知识点？

【设计意图】学生自己归纳知识，加深印象

练习：课后 106 页练习 2,3

环节四 小结提升，形成结构

问题 6：本节课你学习了哪些知识？有什么收获？

【师生活动】学生自主回答，学生根据课堂学习，自主总结知识要点，及运用的思想方法。

环节五 目标检测，检验效果

达标检测

1: (2023·全国·高一专题练习) 若  $4^a = 6^b = 24$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  的值等于 ( )

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

2. (2023·全国·高一专题练习) 计算  $(\frac{1}{2} \log_6 4 + \log_6 3)(\log_3 12 - 2 \log_3 2) =$  ( )

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 4

3. (2023·全国·高一专题练习) 已知  $\log_2 3 = a, \log_2 7 = b$ , 则  $\log_6 21 =$  \_\_\_\_\_. (用含  $a, b$  的代数式表示)

【学生活动】自主思考完成

【设计意图】通过练习, 巩固本节课所学的知识

环节六 布置作业, 应用迁移

1. 课时练    2. 教材 108 页习题 4-2B 组第 3-5 题

## 五 板书设计

换底公式

1、复习: (1) 对数定义

3、典例分析

4、总结

(2) 对数的运算性质

例 3、

例 4、 达标检测

5、作业

2、换底公式及其结论

## 六 教学反思

本节课的重难点为换底公式的引入与证明, 在引入环节我让学生自带计算器, 亲自操作, 深刻的理解了换底的必要性与方便性。对于公式的证明, 充分的发挥了学生的主体性, 通过小组合作交流, 教师引导, 在问题串的驱动下, 层层递进, 很顺利的证明出换底公式及其推论。例 3, 换底公式的应用, 学生做起来非常顺利, 并且想出了很多种方法。例 4 为综合题, 仍以问题出发, 化繁为简, 学生也能解决。自主练习环节学生兴趣很浓, 达到非常好的效果。但在当堂达标检测环节, 由于题型综合程度高, 学生做起来出现一定的问题, 充分的暴露出公式及性质不熟练的现象, 及数学运算能力薄弱。需要在后续教学中把提高学生的数学运算能力作为重要任务。